ISBN 966-02-2074-X

В. В. Кириченко, М. В. Плахотник

Лінійна алгебра

ЛІНІ́ЙНА А́ЛГЕБРА – розділ алгебри, що вивчає векторні (лінійні) простори, лінійні оператори (лінійні відображення), лінійні, білінійні та квадратичні функції (функціонали, або форми) на векторних просторах. Історично першим розділом Л. а. була теорія лінiй. рівнянь (алгебраїчних). У зв'язку з розв'язанням систем лінiй. рівнянь виникло поняття визначника. 1750 отримано правило Крамера для розв'язання системи лінiй. рівнянь, в якій число рівнянь дорівнює числу невідомих, а визначник з коефіцієнтів при невідомих не дорівнює нулю. 1849 був запропонований метод Гауса розв'язання систем лінiй. рівнянь з числовими коефіцієнтами. Цей метод є найпростішим за кількістю необхідних операцій і використовується з різними модифікаціями також для наближеного розв'язання систем рівнянь, коефіцієнти яких також відомі наближено. У зв'язку з вивченням систем лінiй. рівнянь та їх визначників з'явилося поняття матриці. Поняття рангу матриці, запропоноване нім. математиком Г. Фробеніусом 1877, дозволило виразити умови сумісності та визначеності системи лінiй. рівнянь в термінах коефіцієнтів цієї системи (теорема Кронекера–Капеллі). Таким чином, наприкінці 19 ст. закінчено побудову заг. теорії систем лінiй. рівнянь. Якщо у 18–19 ст. осн. зміст Л. а. складали системи лінiй. рівнянь і теорія визначників, то у 20 ст. центр. місце займали поняття вектор. простору та пов'язані з ним поняття лінiй. перетворення, лінiй., білінiй. та полілінiй. функції на вектор. просторі. Вектор. чи лінiй. простором над полем *K* називається множина *V* елементів (векторів), в якому задано операції додавання векторів і множення вектора на елементи поля *K*, що задовольняють певним аксіомам з означення вектор. простору. Одним з найважливіших понять теорії вектор. просторів є поняття лінiй. відображення, гомоморфізму вектор. просторів над одним і тим же полем. Лінiй. оператором чи лінiй. перетворенням називається лінійне відображення простору в себе (ендоморфізм вектор. простору). Якщо простір *V* скінченновимірний, то, вибираючи у *V* базис $e_1, \ldots, e_n$ і взявши

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i,\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

отримують квадратну матрицю $A = (a_{ij})$ порядку n, яку називають матрицею лінiй. перетворення ϕ в даному базисі. Вектор. простір *V* над полем *K* з додатк. операцією множення векторів, що задовольняє деякі додатк. аксіоми, називається алгеброю над *K*. Всі лінійні перетворення простору *V* відносно природно визначених операцій додавання, множення та множення на елементи поля *K* утворюють алгебру над *K*. Усі квадратні матриці фіксов. порядку над елементами з поля *K* також утворюють алгебру над *K*. Зазначена вище відповідність між лiнiй. перетвореннями простору *V* та їх матрицями на заданому базисі є ізоморфізмом цих алгебр, що дозволяє формулювати теореми про лінійні перетворення паралельно матрич. мовою та при їх доведенні користуватися теорією матриць. Велике значення в теорії лiнiй. перетворень має вибір базису, в якому матриця перетворення набуває в деякому сенсі найпростішого вигляду. У випадку алгебраїчно замкненого поля таким виглядом є, напр., жорданова нормал. форма матриці. Важливим випадком лiнiй. перетворення є лінійна функція (лiнiй. функціонал) – лінійне перетворення *V* в *K*. Усі лінійні функції на *V* відносно природ. чином визначених операцій додавання та множення на елементи поля *K* самі утворюють вектор. простір V^* над *K*, котрий називають спряженим простором до *V*. Вектори простору *V* можна в свою чергу розглядати як лінійні функції на спряженому просторі V^*, покладаючи $x(f)=f(x)$ для всіх $x \in V$ та $f \in V^*$. Якщо простір *V* скінченновимірний, то таким чином встановлюється ізоморфізм між просторами *V* та V^{**}. Узагальненням поняття лiнiй. функції є поняття полiлiнiй. функції, тобто функції зі значеннями в *K*, яка залежить від декількох аргументів (з яких частина належить вектор. простору *V*, а частина – вектор. простору V^*), лінійної по кожному аргументу. Ці функції також називають тензорами. Їх вивченню присвячена полілінійна алгебра. Частк. випадок полiлiнiй. функцій – білінійні функції. Кососиметр. полілінійні функції також називаються зовн. формами. На основі поняття вектор. простору визначають різні класичні простори геометрії, зокрема афінні простори, проективні простори та ін. Теорія вектор. просторів має важливі зв'язки з теорією груп. Усі автоморфізми *n*-вимірного вектор. простору *V* над полем *K* утворюють групу відносно множення, ізоморфну групі невироджених квадрат. матриць порядку *n* з елементами з *K*. Гомоморфне відображення деякої групи *G* в цю групу автоморфізмів називається лiнiй. представленням групи *G* у просторі *V*. Вивчення властивостей зображень складає предмет теорії лiнiй. зображень груп. Класична теорія лiнiй. рівнянь і визначників була узагальнена на випадок, коли замість чисел чи елементів поля розглядаються елементи довіл. тіла. Природ. узагальненням поняття вектор. простору над полем *K* є поняття модуля над довіл. кільцем. Осн. теореми Л. а. перестають бути правильними при заміні вектор. простору на модуль. Вивчення можливостей таких узагальнень, властивих для модулів, призвело до виникнення алгебраїч. *K*-теорії.

Рекомендована література

1. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. Москва, 1971;
2. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. Москва, 1975;
3. Калужнін Л. А., Вишенський В. А., Шуб Ц. О. Лінійні простори: Підруч. К., 2010.