ISBN 966-02-2074-X

В. В. Кириченко, М. В. Плахотник

Матриць теорія

МА́ТРИЦЬ ТЕО́РІЯ – розділ математики, що вивчає властивості та застосування матриць. Матриці мають довготривалу історію. У класич. тв. «Математика в дев’яти книгах», написаному до н. е. у Китаї, вміщені приклади використання т. зв. чарів. квадратів (матриць) для розв’язання ліній. рівнянь. «Чарівні квадрати» були відомі й давньоараб. математикам. Приблизно тоді з’явилося поняття принципу додавання матриць. Визначник матриці ввели япон. математик Т. Секі (1683) та нім. математик Ґ.-В. Лейбніц (1693). Після розвитку теорії визначників швейцар. математик Ґ. Крамер почав розробляти свою теорію, а 1751 опублікував відоме правило Крамера. Приблизно тоді ж нім. математик К.-Ф. Ґаус запропонував свій метод розв’язування систем ліній. рівнянь. Основу М. т. заклали в серед. 19 ст. ірланд. математик В.-Р. Гамільтон й англ. математик А. Келі. Фундам. результати належать нім. математикам К.-Т. Вейєрштрасу та Ф.-Ґ. Фробеніусу і франц. математику М.-Е. Жордану. Поняття «матриця», яке вже не було похідним від поняття «визначник», з’явилося 1858 у праці А. Келі. Термін «матриця» першим почав вживати англ. математик Дж.-Дж. Сильвестр, який розглядав матрицю як об’єкт, що породжує сімейство мінорів (визначників менших матриць, утворених викреслюванням рядків і стовпців з початк. матриці). К.-Ф. Ґаус першим встановив зв’язок між квадратич. формами, ліній. відображеннями та матрицями. Франц. математик О.-Л. Коші розглядав визначники як многочлени та 1829 довів, що власні значення симетр. матриць є дійс. числами. Багато теорем М. т. доводили спочатку для матриць малих розмірів: А. Келі теорему Гамільтона–Келі довів тільки для 2×2-матриць, а В.-Р. Гамільтон – для 4×4-матриць. Після цього властивостями визначників займалися нім. учені Ф.-Ґ. Айзенштайн, К.-Ґ. Якобі, Л. Кронекер, К.-Т. Вейєрштрас, Ф.-Ґ. Фробеніус і В. Йордан.

Квадратні матриці застосовують для опису ліній. перетворення вектор. простору. Серед них окремо виділяють вироджені, невироджені, переставні, подібні, конгруентні, нормал., унітарні, ортогонал., самоспряжені, симетр., косоерміт., кососиметр., додатньовизначені, проекційні, діагонал., одиничні, нульові. Окрім визначника, для квадрат. матриць важливою характеристикою є слід. За допомогою прямокут. матриць розв’язують системи ліній. рівнянь. Для них важливими є такі поняття, як трикутна матриця, псевдообернена матриця, формула Ґревіля, сингуляр. розклад матриці, QR-розклад матриці та поляр.

розклад матриці. Також для прямокут. матриць існує така важлива характеристика, як ранг. Під час вивчення блоч. матриць застосовують поняття: добуток Кронекера, обернення блоч. матриці, матрична тотожність Вудбурі. Для аналіт. геометрії використовують матрицю повороту, матрицю перестановки та матрицю Гаусголдера. У теорії графів виникає матриця інцидентності, матриця суміжності та степенева матриця; у цифр. обробленні сигналів – бінарна матриця, матриця перестановки та матриця Адамара. Матриці відіграють значну роль у теорії груп. За теоремою Машке відомо: нехай G – скінченна група та K – поле, характеристика якого не ділить порядок G, тоді груп. алгебра K[G] напівпроста; якщо характеристика поля K дорівнює 0, то K[G] є добутком матрич. алгебр над тілами над K; доданки відповідають незвід. зображенням G над K. За теоремою Бермана–Джонса відомо: нехай G – скінченна група; якщо для кожного простого p, яке ділить порядок G, p-силів. підгрупа G є циклічною порядку p, або p^2, тоді кількість неізоморф. нерозкладних ZG-модулів n(ZG) скінченна. Встановлено критерій скінченності кількості нерозклад. зображень частково впорядков. множини над довіл. комутатив. кільцем. Питання скінченності цієї кількості можна звести до розв’язання матрич. задачі.

Засн. київ. школи з теорії зображень та теорії матрич. задач є А. Ройтер. Запропонований ним лінійно-алгебраїч. метод дослідж., який розвивали його учні, дозволив отримати низку важливих результатів у теорії зображень, зокрема щодо проблем Бравера–Тролла та Ґабріеля для скінченно вимір. алгебр, задачі про опис скінченних p-груп із абелевою підгрупою індексу p, задачі Гельфанда про модулі Гаріш-Чандри над алгеброю Лі групи SL(2, R). А. Ройтер, М. Клейнер і Л. Назарова довели критерій скінченності для зображень скінченних частково впорядкованих множин; Ю. Дрозд довів ручну-дику дихотомію для широкого класу матрич. задач. Донині побудовано теорію зображень скінченних груп над полями. Матриці використовують під час побудови заг. лiній., діагонал., трикут., унітрикут., модуляр. груп. Скінченну групу (зокрема й симетричну) можна точно зобразити матрицями перестановок, що містять лише «0» та «1». Різноманітні проблеми М. т. досліджують львів. учені М. Комарницький, Б. Забавський та їхні учні. Поле комплекс. чисел може бути точно зображене матрицями над полем дійс. чисел. При цьому комплекс. числу z = x + iy відповідає матриця

$$Z = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

Тіло квартеніонів може бути точно зображене матрицями над полем дійс. чисел. При цьому елементу тіла кватерніонів q = t + ix + jy + kz відповідає матриця

$$Q = \begin{bmatrix} t & x & y & -z \\ -x & t & -z & -y \\ -y & z & t & x \\ z & y & -x & t \end{bmatrix}.$$

Рекомендована література

1. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр / Пер. с англ. Москва, 1969;
2. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. Москва, 1970;
3. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. семинара Ленингр. отдел. Матем. ин-та. 1972. Т. 28;
4. Воеводин В. В. Линейная алгебра. Москва, 1974;
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва, 1975;
6. Плахотник В. В. Представления частично упорядоченных множеств над коммутативными кольцами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, вып. 3;
7. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Москва, 1977;
8. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра / Пер. с нем. Москва, 1979;
9. Ланкастер П. Теория матриц / Пер. с англ. Москва, 1982;
10. Y. A. Drozd, V. V. Kirichenko. Finite Dimensional Algebras. Berlin, 1994;
11. P. Gabriel, A. Roiter. Representations of Finite-Dimensional Algebras. Berlin, 1997;
12. Голуб Дж., ван Лоун Ч. Матричные вычисления / Пер. с англ. Москва, 1999;
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва, 2010.

Бібліографічний опис:

Матриць теорія / В. В. Кириченко, М. В. Плахотник // Енциклопедія Сучасної України [Електронний ресурс] / Редкол.: І. М. Дзюба, А. І. Жуковський, М. Г. Железняк [та ін.] ; НАН України, НТШ. – К. : Інститут енциклопедичних досліджень НАН України, 2018. – Режим доступу: https://esu.com.ua/article-62917. – Останнє поновлення : 2017.