ISBN 966-02-2074-X

В. В. Кириченко, М. В. Плахотник

Матриця

МА́ТРИЦЯ – таблиця, що складається з m рядків та n стовпчиків, елементи a_{ij} якої належать деякій множині K

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Цю таблицю також називають m × n -М. над K, або М. розміру m × n над K. Нехай $M_{m,n}(K)$ – сукупність усіх m × n -М. над K. Якщо m = n, то таблицю називають квадрат. М. порядку n. Множина $M_n(K)$ – сукупність усіх квадрат. М. розміру n над K. Для М. також використовують позначення

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{та } \|a_{ij}\|.$$

У найважливіших випадках у ролі поля K виступає поле дійс. чисел, поле комплекс. чисел, кільце многочленів, кільце цілих чисел, кільце функцій, довіл. асоціат. кільце. Операції додавання та множення, визначені на K, природ. чином переносяться на М. Над K виникає матричне числення. Нехай K – асоціат. кільце, A = $||a_{ij}||$ та B = $||b_{ij}||$ – М. розміру m × n над K. Тоді сума A + B = $||a_{ij} + b_{ij}||$. При цьому A + B $\in M_{m,n}(K)$, додавання комутативне й асоціативне. Нульовою М. з $M_{m,n}(K)$ називають М., всі елементи якої дорівнюють нулю. Для кожної A $\in M_{m,n}(K)$ має місце рівність A + 0 = 0 + A = A. Нехай A = $||a_{ij}|| \in M_{m,k}(K)$ та B = $||b_{ij}|| \in M_{k,n}(K)$. Добуток матриць A та B визначається за правилом C = $||g_{ij}|| \in M_{m,n}(K)$, де

$$\gamma_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj}.$$

Множення М. асоціативне та дистрибутивне відносно додавання, але не комутативне. Якщо K – кільце з одиницею, то М. E_n, у якої на діагоналі (тобто не перетині рядків і стовпців з однаковими номерами) стоять 1, а на ін. позиціях стоять 0, буде одиницею кільця $M_n(K)$.

Множення М. некомутативне: при $n > 2$ для кожного асоціат. кільця з одиницею знайдуться такі $A, B \in M_n(K)$, що $AB \neq BA$. Нехай $\alpha \in K$, $A = ||a_{ij}|| \in M_{m,n}(K)$. Добутком М. A на (число) α називають М. $\alpha A = ||\alpha a_{ij}|| \in M_{m,n}(K)$. Нехай K – кільце з одиницею, М. e_{ij} називають М., у якої єдиний ненульовий елемент дорівнює 1 і знаходиться на позиції (i, j). Якщо K – поле, то $M_{m,n}(K)$ – вектор. простір над K розмірності mn, а М. e_{ij} – твірні цього простору. Нехай $m = m_1 + \ldots + m_k$ та $n = n_1 + \ldots + n_l$ подання чисел m та n у вигляді суми натуральних. Тоді М. $A \in M_{m,n}(K)$ можна записати як

$$A = (A_{ij}) = \begin{bmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \ldots & A_{kl} \end{bmatrix},$$

де $A_{ij} \in M_{m_i,n_j}(K)$. Такий запис М. називають блоч. М. Нехай $B = (B_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ – блочна М. і $p = p_1 + \ldots + p_t$. Тоді М. $C = AB$ буде блочною М. і складатиметься з блоків C_{ij}, $i \leq k$, $j \leq t$, причому

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{l} A_{ik} B_{kj}.$$

Нехай K – поле, М. $A \in M_n(K)$ називають оборотною, якщо існує М. $B \in M_n(K)$, така що $AB = E_n$. Незважаючи на те, що добуток М. некомутативний, при цьому виконується рівність $BA = E_n$. У цьому випадку пишуть $B = A^{-1}$, М. A називають оборотною (або невиродженою), а М. B – оберненою до A. Сукупність всіх оборот. М. з $M_n(K)$ утворює групу відносно множення. Нехай $v_1, \ldots, v_n$ – базис вектор. простору V розмірності n. Кожна М. $A = ||a_{ij}|| \in M_n(K)$ задає деяке лінійне перетворення σ вектор. простору за правилом

$$\sigma(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k.$$

Лінійне перетворення σ називають невиродженим, якщо $\sigma(V) = V$. σ є невиродженим тоді, коли М. A невироджена. Нехай $A = ||a_{ij}|| \in M_n(K)$. М. $B = ||b_{ij}|| \in M_n(K)$ називають транспонованою до A і позначають $B = A^t$, якщо $b_{ij} = a_{ji}$ для всіх i та j. М. A невироджена тоді, коли A^t невироджена. Вектор з вектор. простору V розмірності n над полем K можна розглядати як М. з n рядків та одного стовпчика. Тоді добуток Av, знайдений за правилом множення М., є деяким вектором з V. Якщо для М. $A \in M_n(K)$, вектора $v \in V$ та $\lambda \in K$ виконано рівність $Av \in \lambda v$, то λ називають влас. числом A, а $v \in V$ – влас. вектором A. М. лінній. перетворення, записані в різних базисах, називають подібними. Для М. $A \in M_n(K)$ визначають мін. многочлен $\mu_A(x)$ як многочлен найменшого степеня, для якого виконана рівність $\mu_A(A)$. Для М. $A \in M_n(K)$ многочлен $f_A(x) = \det(A - xE)$ називають характеристич. многочленом М. A. Множина влас. чисел М. A збігається з множиною коренів f_A над K. Крім того, за теоремою Гамільтона–Келі справджується матрична рівність $f_A(A) = 0$. Характеристичні многочлени подіб. М. збігаються.

Бібліографічний опис:

Матриця / В. В. Кириченко, М. В. Плахотник // Енциклопедія Сучасної України [Електронний ресурс] / Редкол.: І. М. Дзюба, А. І. Жуковський, М. Г. Железняк [та ін.] ; НАН України, НТШ. – К. : Інститут енциклопедичних досліджень НАН України, 2018. – Режим доступу: https://esu.com.ua/article-62919. – Останнє поновлення : 2017.