ISBN 966-02-2074-X

В. І. Горбачук

Математичної індукції метод

МАТЕМАТИ́ЧНОЇ ІНДУ́КЦІЇ МЕ́ТОД

В основі М. і. м. лежить твердження, що називають принципом матем. індукції: якщо перше твердження A(1) певної послідовності тверджень A(n) є правильним, а за кожним правильним твердженням цієї послідовності наступне також правильне, то всі твердження заданої послідовності є правильними. Цей спосіб матем. доведень опирається на поняття індукції (див. Індукція і дедукція). У 18 ст. академік С.-Петербур. АН Л. Ейлер сказав: «У мене немає для доведення жодних інших доказів, за винятком довгої індукції, яку я провів так далеко, що анітрохи не можу сумніватися в законі, що керує утворенням цих членів... І здається неможливим, щоб закон, що, як було встановлено, виконується, наприклад, для 20 членів, не можна було б спостерігати і для наступних».

Однак, на відміну від дедукції, індукція може призвести до правил. і неправил. результатів. Тому виникла необхідність у науково обґрунтов. методі, що дозволив би робити заг. висновки на основі декількох часткових. Гол. заслуга у розробленні цього методу належить франц. математикам Б. Паскалю та Р. Декарту, а також швейцар. математику Я. Бернуллі.

Відповідно до зазначеного вище принципу матем. індукції певні твердження є правильними не для всіх натуральних n, а лише починаючи з якогось натурал. числа p. Такі твердження інколи можна довести, застосовуючи дещо ін. варіант М. і. м., а саме: твердження A(n) є правильним для всіх натурал. n≥p, якщо: воно є правильним при n=p (а не при n=1, як це було вище); з правильності цього твердження при n=k, k≥p (а не k≥1) випливає, що воно є правильним і при n=k+1. Обидва формулювання еквівалентні у тому розумінні, що будь-яка теорема, яку можна довести за допомогою М. і. м. в одній формі, може бути доведена за допомогою другої його форми.

Часто також трапляється, що A(1) і A(n+1) доводять аналогіч. міркуваннями. У таких випадках зручно користуватися такою еквівалент. формою принципу матем. індукції: якщо для будь-якого n із припущення, що A(x) є правильним для довільного натурального x n, випливає правильність A(x) при x=n, то A(x) справджується для будь-якого натурал. x. У такій формі принцип матем. індукції може бути застосований для доведення тверджень A(x), в яких параметр x перебігає ту чи ін. множину, цілком упорядковану за деяким трансфініт. типом (трансфінітна індукція).

Інколи для доведення певного твердження A(n), що залежить від натурал. параметра n, індукцією по n потрібно одночасно з A(n) доводити індукцією по n низку ін. тверджень, без яких не можна реалізувати індукцію для A(n). У таких випадках маємо справу із сумісною матем. індукцією. Велика кількість понять, що визначають такою індукцією, призводить до необхідності застосування аксіоматич. методу в індуктив. визначенні та доведенні. Це є наоч. прикладом необхідності аксіоматич. методу для розв’язання конкрет. матем. задач, а не лише питань, що стосуються основ математики.

Рекомендована література

1. Клини С. К. Введение в метаматематику / Пер. с англ. Москва, 1957;
2. Гельфанд С. И. и др. Задачи по элемен-тарной математике. Москва, 1965;
3. Кочетков Е. С. и др. Алгебра и элемен-тарные функции. Москва, 1973. Ч. 2;
4. Колмогоров А. М. та ін. Алгебра і початки аналізу. К., 1977;
5. Гильберт Д. и др. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики / Пер. с нем. Москва, 1979.