Модулярна форма. *Енциклопедія Сучасної України* (2019)
ISBN 966-02-2074-X

Модулярна форма

МОДУЛЯ́РНА ФО́РМА

– однорідна голоморфна функція F на множині ґраток в C. Тут ґратка – це підгрупа $\Lambda \cong Z^2$ в $(C, +)$, породжена двома числами ω_1, ω_2, що утворюють базу C над R. Однорідність F означає, що існує ціле $k \geq 0$, таке, що $F(\lambda\Lambda) = \lambda^{-k}F(\Lambda)$ для всіх $\lambda \in C^{\times}$ і всіх ґраток Λ. Досить обмежитися парною вагою k, інакше $F \equiv 0$. За допомогою гомотетії λ – можна зробити, щоб $\omega_2 = 1$, а $\omega_1 \in H = \{\tau \in C | Im\tau > 0\}$ є параметром ґратки. Функція $f : H \to C$, $f(\tau) = F(Z.\tau + Z.1)$ має автоморфну властивість

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

для всіх $\tau \in H$ і всіх $(a_c\, b_d) \in \Gamma_1 = SL(2, Z) = \{\gamma \in Mat(2, Z) | det\gamma = 1\}$, еквівалентну однорідності F. Голоморфність F означає голоморфність f і поліноміал. обмеженість росту f побл. межі H. З обмеженості випливає, що $f(x + iy) = 0(1)$ при $y \to \infty$ і $f(x + iy) = 0(y^{-k})$ при $y \to 0$. Нехай $N \geq 1$ і $\Gamma(N) = \{(a_c\, b_d) \in SL(2, Z) \mid a \equiv d \equiv 1(mod N)$, $c \equiv b \equiv 0(mod N)\}$ – гол. конгруенц-підгрупа рівня N. Більш загально, М. ф. ваги k і рівня Γ, де Γ – підгрупа в $SL(2, Z)$, що містить $\Gamma(N)$, називають голоморфну функцію $f : H \to C$, що задовольняє рівняння (1) для $k \geq 0$, $\{(a_c\, b_d) \in \Gamma$ і має поліноміал. ріст побл. межі H як вище. Для $\Gamma = \Gamma(N)$ говоримо про М. ф. рівня N. М. ф. ваги k і рівня Γ утворюють скінченновимір. простір $M_k(\Gamma)$ (нульовий при $k < 0$) і градуйована алгебра $M_* = \oplus_{k\geq 0} M_k(\Gamma)$ скінченнопороджена над C. Напр., $M_k(\Gamma_1) = 0$ для непарних k, а для парних k $dim\, M_k(\Gamma_1) = [k / 12]$ при $k \equiv 2(mod 12)$ і $dim\, M_k(\Gamma_1) = [k / 12] + 1$ інакше. Більш загально, якщо Γ – дискретна підгрупа $SL(2, R)$, і $\Gamma \setminus H$ має скінченний гіперболіч. об'єм v (стосовно 2-форми $y^{-2}dx\, dy$), то $dim\, M_k(\Gamma) \leq kV / (4\pi) + 1$ для всіх $k \geq 0$. Зокрема, для підгрупи, що містить -1, $\Gamma \subset \Gamma_1$ скінченного індексу r $dim\, M_k(\Gamma) \leq [kr / 12] + 1$. При дії групи $SL(2, R)$ з вагою $k > 0$ на голоморф. функціях

$$H \to C, f \to f \mid_k \gamma,$$

$\gamma = (a_c\, b_d) \in SL(2, R)$, $(f \mid_k \gamma)(\tau) =$

є М. ф. ваги 12 рівня 1. Функція Δ не обертається в 0 на H. Модулярна функція – частка двох М. ф. однакової ваги, отже мероморфна на $\Gamma_1 \setminus H$, множині параметрів (модулів) еліптич. кривих. Прикладом слугує модуляр. інваріант $j(\tau) = E_4(\tau)^3 / \Delta(\tau)$, що задає бієкцію $j : \Gamma_1 \setminus H \to C$.

Нехай $\theta(\tau) = \Sigma_{n\in Z}\, exp(\pi i n^2\tau)$ – тета-функція Якобі, $\tau \in H$. Тоді θ^2 – М. ф. ваги 1 рівня 4. З одновимірності певного простору М. ф. випливає, що число представлень цілого $n > 0$ як суми квадратів двох цілих чисел є $4\Sigma_{d|n, d>0}^{(d,2)=1} (-1)^{(d-1)/2}$. З того, що θ^4 – М. ф. ваги 2 рівня 4 виводиться: число представлень цілого $n > 0$ як суми квадратів чотирьох цілих чисел є $8\Sigma_{d|n, d>0}^{d\not\equiv 0(mod 4)}$. Узагальнюючи, розглянемо додатно визначену квадратичну форму $Q : Z^m \to Z$, $Q(x) = x^t Ax/2$, де $A \in Mat_m(Z)$ – симетрична додатно визначена матриця з парними діагонал. елементами. З нею асоціюється тета-ряд $\Theta_Q(\tau)$ $\Sigma_{x_1,\ldots,x_m \in Z}\, q^{Q(x_1,\ldots,x_m)} = \Sigma_{n=0}^{\infty} R_Q(n)q^n$, де $q = e^{2\pi i\tau}$ і $R_Q(n) = \#\{x \in Z^m \mid Q(x) = n\}$. Нехай N – найменше додатне ціле, таке, що $NA^{-1} \in Mat_m(Z)$ має парні діагонал. елементи. Тоді для $m = 2k$, $k \in Z_{>0}$, функція Θ_Q є М. ф. ваги k рівня N. Зокрема, для $detA = 1$, Θ_Q є М. ф. ваги k рівня 1. Напр., це вірно для ґратки $E_8 (m = 8)$ або ґратки Лича ($m = 24$).

На просторі М. ф. ваги k рівня 1 діє оператор Геке T_m, $m \geq 1$. Він переводить однорідну функцію F степеня $-k$ від ґратки $\Lambda \subset C$ в суму $T_m F(\Lambda) = m^{k-1}\, \Sigma F(\Lambda')$, де $\Lambda' \subset \Lambda$ пробігає підґратки індексу m. Константа нормалізації вибрана так, щоб ряди з цілими коефіцієнтами Фур'є переходили в такі ж. Скінченна множина ґраток $\Lambda' \subset \Lambda$ індексу m ототожнюється з множиною $\Gamma_1 \setminus M_m$, де $M_m \subset Mat(2, Z)$ – множина матриць $\gamma = (a_c\, b_d)$ з визначником m. Тому

$$T_m f(\tau) = m^{k-1} \Sigma_{\gamma\in\Gamma_1\setminus M_m} (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right).$$

За представників класів суміжності можна обрати цілочисельні матриці $(a_0\, b_d)$ з $ad = m$, $0 \leq b < d$. Тому $T_m f(\tau) = m^{k-1}\, \Sigma^{d>0}\, d^{-k}$

Бібліографічний опис:

Модулярна форма// Енциклопедія Сучасної України [Електронний ресурс] / Редкол.: І. М. Дзюба, А. І. Жуковський, М. Г. Железняк [та ін.] ; НАН України, НТШ. – К. : Інститут енциклопедичних досліджень НАН України, 2019. – Режим доступу: https://esu.com.ua/article-69341

2001-2025 © Ця енциклопедична стаття захищена авторським правом згідно з чинним законодавством України (докладніше).