

Мотивне інтегрування

МОТИВНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

– інтегрування зі значеннями в кільці мотивів, тобто класів еквівалентності алгебричних *многовидів*. М. і. започатковане рос. математиком М. Концевичем при доведенні гіпотези Батирева. Нехай X – гладкий комплекс. проєктив. алгебрич. многовид Калабі-Яу вимірності n (що для наших потреб означає існування голоморф. n -форми, що ніде не перетворюється в 0). Інакше кажучи, n -й зовн. степінь Ω^n голоморф. кодотич. розшарування є тривіал. одновимір. розшаруванням. За допомогою p -адич. інтегрування рос. математик В. Батирев довів, що біраціонально еквівалентні гладкі многовиди Калабі-Яу X, X' мають однакові числа Бетті, $\dim H(X, \mathbb{C}) = \dim H(X', \mathbb{C})$. М. Концевич довів за допомогою М. і., що такі ж X, X' мають однакові числа Годжа $\dim H(X, \Omega^i) = \dim H(X', \Omega^i)$. Перш за все, годжева характеристика $E(X) = \sum (-1)^i \dim H(X, \Omega^i)$ $u^i v^j \in \mathbb{Z}[u, v]$ є функцією $\text{Var}_c \rightarrow K_0(\text{Var}_c) \rightarrow \mathbb{Z}[u, v]$ з категорії комплекс. многовидів (відокремлюваних редуков. схем скінчен. типу), де наївне кільце Гротендіка $K_0(\text{Var}_c)$ – абелева група, породжена класами ізоморфізму $[X]$ таких многовидів зі співвідношеннями $[X] = [Y] + [X - Y]$ для замкненого підмноговиду $X \subset Y$. Добуток заданий як $[X] \cdot [X] = [X \times_{\text{Spec } \mathbb{C}} Y]$. Клас ізоморфізму прямої позначається $L = [A^1] = [C^1]$. Нехай $f : Y \rightarrow X$ – відтинково тривіал. розшарування з шаром Z . Це означає, що X можна записати як скінченне диз'юнктивне об'єднання $\cup X$ локально замкнених підмножин X_i , таких, що $f|_{X_i} = (f^1 X_i \cong X_i \times Z \rightarrow X_i)$ є проєкцією. Тоді $[Y] = [X] \cdot [Z]$ в $K_0(\text{Var}_c)$. Кажемо, що $\tau \in K_0(\text{Var}_c)$ є d -вимірним, $\dim \tau = d$, якщо цей елемент представляється як $\tau = \sum a_i [X_i]$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $\dim X_i \leq d$, і не існує представлення з $\dim X_i \leq d - 1$ для всіх i . За означенням $\cong \infty$. Вимірність поширюється на локалізацію $M_c = K_0(\text{Var}_c)[L^{-1}]$ вимогою $\dim L^{-1} = -1$. Функція $\exp(\dim) : M_c \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ є неархімедовою нормою на M_c . Поповнення $\bar{M}_c$ у цій нормі є кільцем, у якому приймають значення мотивні мі-

канонічне відображення. Алгебра конструктив. підмножин схеми – це найменша алгебра, що містить підмножини, замкнені в топології Зариського. Об'ємом (мірою) циліндрич. множини A назовемо елемент $\mu_X(A) = [B] \cdot L^{-nm} \in M_c$. Він не залежить від вибору m : $\mu_X(A) = [(\pi_m^{m+k})^{-1} B] \cdot L^{-n(m+k)}$, $k \geq 0$, оскільки $\pi_m^{m+k} : J_{m+k}(X) \rightarrow J_m(X)$ – локально тривіальне A^k -розшарування. Клас циліндрич. множин поширюється до класу вимір. множин. Серед вимір. функцій міститься функція, визначена порядком дотичності дуги до підсхеми $Y \subset X$, визначеної пучком ідеалів J_Y . Отже, функція $\text{ord}_Y : J_\infty(X) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ співставляє дузі $\vartheta : O_X \rightarrow C[[t]]$ супремум $\text{ord}_Y(\vartheta)$ поміж усіх $e \geq 0$, таких, що $\vartheta(J_Y) \subset (t^e)$. Тоді для $s \geq 0$ $\text{ord}_Y^{-1}(S)$ є циліндрич. множиною. Якщо підмноговид Y ніде не щільний в X , то $\text{ord}_Y^{-1}(\infty) = J_\infty(Y)$ є вимір. множиною міри 0. Мотив. інтеграл функції $L^{-\text{ord}_Y}$ визначається як $\int_{J_\infty(X)} L^{-\text{ord}_Y} d\mu_X = \sum_{s=0}^{\infty} \mu(\text{ord}_Y^{-1}(s)) \cdot L^{-s}$. Напр., для $Y = \emptyset$ $\text{ord}_Y \equiv 0$ і $\int_{J_\infty(X)} d\mu_X = [X]$. Для ефектив. дивізора $Y = \sum_{i=1}^s r_i D_i$ ($r_i > 0$) з носієм з нормал. перетинами і гладкими D_i маємо

$$\int_{J_\infty(X)} L^{-\text{ord}_Y} d\mu_X = \sum_{j \in \{1, \dots, s\}} [D_j] \prod_{i \neq j} \frac{L-1}{L^{r_i+1}-1} = \frac{[D_j]}{\prod_{i \neq j} [P^{r_i}]},$$

де $D_j = \cap_{i \neq j} D_i - \cup_{i \neq j} [D_i]$.

Якщо $f : X'' \rightarrow X$ – влас. біраціонал. морфізм гладких C -схем і D – ефектив. дивізор на X , то $\int_{J_\infty(X)} L^{-\text{ord}_D} d\mu_X = \int_{J_\infty(X')} L^{-\text{ord}_{f^{-1}D + K_{X'/X}}} d\mu_{X'}$ (формула Концевича заміни змінних у мотив. інтегралі). Відносний каноніч. дивізор $K_{X'/X}$ визначається ідеалом Якобі для f . Ця формула застосована до відображень $X' \leftarrow X'' \rightarrow X$ і дозволяє зробити висновок, що біраціонально еквівалентні X', X мають однаковий об'єм $[X'] = [X] \in M_c$, а, отже, і однакові числа Годжа. Крім геом. підходу до М. і., існує також арифмет. підхід, в якому мотив. об'єм зіставляють не з множинами, а формулами логіки з мови Денефа–Паса, що описує

Бібліографічний опис:

Мотивне інтегрування// Енциклопедія Сучасної України [Електронний ресурс] / Редкол.: І. М. Дзюба, А. І. Жуковський, М. Г. Железняк [та ін.] ; НАН України, НТШ. – К. : Інститут енциклопедичних досліджень НАН України, 2019. – Режим доступу:

<https://esu.com.ua/article-69342>

2001-2025 © Ця енциклопедична стаття захищена авторським правом згідно з чинним законодавством України ([докладніше](#)).