ISBN 966-02-2074-X

І. В. Сергієнко, В. К. Задірака

Обчислювальна математика

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМА́ТИКА – розділ математики, що вивчає методи чисельного (точного або наближеного) розв’язання задач прикладної математики за допомогою обчислювальних машин (ЕОМ, комп’ютерів). Предмет О. м. – чисел. методи (Ч. м.), або множина обчислюв. алгоритмів (О. а.), питання їх обґрунтування та дослідж. характеристик їхньої якості: збіжність та швидкість збіжності Ч. м., їхня стійкість та похибка, оптимальність за різними критеріями, час реалізації на ЕОМ, необхідна пам’ять ЕОМ та ін. Ч. м. збігається, якщо наближений розв’язок прямує до точного розв’язку задачі, коли параметри Ч. м. прямують до відповід. гранич. значень. Ч. м. називається стійким, якщо наближений розв’язок неперервно залежить від вихід. даних задачі та якщо похибка заокруглення лишається обмеженою при заданих межах зміни параметрів Ч. м. Його класифікують за різними ознаками: за способами одержання результатів розв’язку задачі поділяють на чисел., аналіт. та чисел.-аналіт.; за характеристиками якості – стійкі (нестійкі), збіжні (розбіжні), швидкі (повільні) збіжні, ефект. (економні) за числом операцій та ін. критеріями, оптимальних за точністю (швидкодією, пам’яттю) тощо; за способами дискретизації континуал. матем. моделі – проекц. або варіац., скінченно-різниц. методи або методи сіток, проекц.-різниц. або змішані методи та ін.; залежно від моделі обчислень (ЕОМ, комп’ютера) – послідов., орієнтов. на змінну розрядність, паралельні, гібридні; за принципами побудови розв’язку – прямі, ітераційні, випадк. пошуку, комбіновані, потенціалів (інтеграл. представлень розв’язків у теорії поля та ін. розділах матем. фізики); регуляризації, квазірозв’язків, принципу нев’язок; Ч. м. пасив., послідов., послідовно-оптимал. та стохаст. стратегій; за запитами зовн. середовища і особливостями ЕОМ – на способи розв’язання задач у режимі індивід. користування (off-line або on-line), колект. користування з розподілом часу (time-sharing), конвеєр. оброблення інформації (pipe-line) та реал. часу (real time). В О. м. традиційно виділяють осн. класи задач: інтерполювання та наближення функцій; чисел. диференціювання й інтегрування; розв’язання систем ліній. алгебрич. рівнянь; обчислення влас. значень та влас. векторів матриць; розв’язання звичай. диференц. рівнянь (задач Коші та крайових задач); розв’язання диференц. рівнянь із частин. похід., інтеграл. рівнянь; мінімізація функцій та матем. програмування (оптимізація). З усього розмаїття приклад. задач виокремлюють задачі, що частіше всього зустрічаються у застосуваннях і саме в тому порядку, як це буває на практиці – після вимірів та спостережень виконується статист. оброблення, далі розв’язуються деякі задачі наближення з метою побудови відповід. матем. моделі, в рамках якої потім розв’язують різні рівняння або шукають екстремуми деяких функціоналів із додатк. умовами або без них. При цьому враховується розподіл задач на коректно та некоректно поставлені.

О. м. веде свою історію від глибокої давнини, її початком вважають правила обчислення іррац. чисел. Швидкого розвитку вона набула у 1960-х рр. з появою ЕОМ та їх впровадженням для розв’язання важливих задач приклад. математики. Результати дослідж. знайшли своє відображення у матем. забезпеченні ЕОМ, що розроблялося. У великих обчислюв. центрах створ. потужні б-ки стандарт. програм та пакети приклад. програм, що не лише сприяли якіс. розв’язанню стандарт. класів задач обчислюв. та приклад. математики, але й давали суттєвий поштовх наступ. теор. дослідж. Ч. м. Поняття наближеного розв’язку припускає відповідні відомості про похибки знайденого наближення. Усі теор. результати й проблеми в галузі О. м. до недавнього часу переважно концентрувалися навколо аналізу похибок за рахунок неповноти та неточності вхід. даних, неточностей реалізації арифмет. операцій на ЕОМ та похибок алгоритмів. В останні роки, у зв’язку з широким застосуванням ЕОМ та розв’язанням усе більш склад. задач, значну увагу приділяють, окрім дослідж. повної похибки (яка за нерівністю трикутника не перевищує суми перерахованих), також вивченню ін. характеристик алгоритмів, зокрема часу і пам’яті, необхід. для реалізації алгоритмів на ЕОМ. Використання оцінок наведених характеристик дозволяє зробити висновок про якість отриманого розв’язку, проводити порівнял. аналіз алгоритмів та програм, вибирати параметри програми, які дають змогу розв’язати задачу з характеристиками якості, що вимагаються. У зв’язку зі збільшенням числа та ускладненням задач, що розв’язуються, постійно зростають вимоги до ефективності відповід. Ч. м. Нерідко при розв’язанні задач традиц. методами ми не отримуємо потріб. значення деякого показника якості розв’язку, напр., розв’язку з необхід. точністю або з макс. можливою точністю. У таких випадках буває корисно, а інколи й необхідно, застосувати оптимал. за відповід. критерієм алгоритм розв’язання задачі. Це дає можливість або отримати шуканий розв’язок, або довести, що його неможливо отримати при інформації, що задана. Для побудови оптимал. за точністю алгоритмів використовують методи «капелюхів», гранич. функцій, нев’язки, квазірозв’язків тощо. Оптимал. за швидкодією (або близькі до них) алгоритми часто вдається побудувати за допомогою теорії швидких ортогонал. перетворень (алгоритми швидкого перетворення: Фур’є, Волша, Винограда, Хартлі та ін.) або методів паралел. обчислень із застосуванням певних моделей обчислень. Ефект від використання оптимал. та близьких до них алгоритмів порівнюють з ефектом від використання нової елемент. бази і сучас. архітектури обчислюв. машин. Методи відшукання оптимал. розв’язків та їх стійка реалізація на ЕОМ дозволяють вірно сформулювати вимоги до точності вихід. інформації та розрядності ЕОМ, при яких може бути отриманий наближений розв’язок із наперед заданою точністю. Розв’язок більшості задач за допомогою сучас. обчислювальної техніки засн. на обчислюв. експерименті, що органічно пов'язує матем. модель, О. а., розрахунки на ЕОМ та експеримент. Окрім того, обчислюв. експеримент відіграє важливу роль під час отримання апостеріор. оцінок похибок О. а., дослідж. їхньої ефективності та тестування якості приклад. програм. забезпечення тощо.

Серед сучас. укр. розробок – алгоритми виявлення та уточнення апріор. інформації про задачу; комплекс. підхід до оцінки похибки наближеного розв'язку задачі; побудова оптимал. алгоритмів в умовах найповнішого використання апріор. інформації; побудова оптимал. інформ. операторів для деяких класів задач; теорія поліноміал. оператор. інтерполяції; теорія наближеного розв'язування неліній. оператор. і функціон. рівнянь, що мають неєдиний розв'язок; теорія різниц. та скінченно-елемент. схем з узагальненими розв'язками; методика тестування якості О. а. та програм, алгоритми паралел. обчислень для деяких класів задач та інтелектуал. пакети програм розв'язування стандарт. класів задач О. м. – ПОМ-1, ЦОС-1, LINSYST, NILISYST, САРПОК, ПАМІМД та ін. для одно- й багатопроцесор. та трансп'ютер. ЕОМ і систем. Знач. внесок у розвиток О. м. зробили вчені П. Бондаренко, В. Задірака, А. Лучка, І. Ляшко, В. Макаров, І. Молчанов, Г. Положій, О. Самарський, І. Сергієнко, В. Скопецький, а також Л. Коллатц (Німеччина), Дж. Трауб, Дж. Форсайт (обидва – США), Дж. Вілкінсон (Велика Британія) та ін. В Україні успішно працюють матем. школи, що орієнтов. на спеціалістів із О. м., зокрема з питань оптимізації обчислень (при Інституті кібернетики НАНУ, Київ) та сітк. методів (при Київ. університеті). Найчастіше математики-обчислювачі друкують свої наук. праці у видавництвах «Наукова думка» та «Вища школа», у ж. «Кибернетика и системный анализ» (видає Інститут кібернетики НАНУ) й «Журналі обчислювальної та прикладної математики» (Київ. університет). Осн. закладами вищої освіти в Україні, де готують фахівців з О. м., є Київ. та Львів. університети.

Рекомендована література

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1–2. Москва, 1962;
2. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Пер. с англ. Москва, 1970;
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. Москва, 1971;
4. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. Москва, 1973;
5. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А. Методы вычислений: Числ. анализ. Методы решения задач матем. физики. К., 1977;
6. Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюптя В. И. Математические методы исследования операций. К., 1979;
7. Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов / Пер. с англ. Москва, 1983;
8. Методы вычислений на ЭВМ: Справоч. К., 1986;

9. Бабенко К. И. Основы численного анализа. Москва, 1986;
10. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. К., 1988;
11. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. К., 1998;
12. Хомченко А. Н. Обчислювальна математика. Хн., 2006;
13. Шевчук Б. М., Задірака В. К., Гнатів Л. О., Фраєр С. В. Технологія багатофункціональної обробки і передачі інформації в моніторингових мережах. К., 2010;
14. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання. К., 2012;
15. Прокопенко Ю. В., Татарчук Д. Д., Казміренко В. А. Обчислювальна математика: Навч. посіб. К., 2013;
16. Задірака В. К., Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. К., 2017.

Бібліографічний опис:

Обчислювальна математика / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака // Енциклопедія Сучасної України [Електронний ресурс] / Редкол.: І. М. Дзюба, А. І. Жуковський, М. Г. Железняк [та ін.] ; НАН України, НТШ. – К. : Інститут енциклопедичних досліджень НАН України, 2022. – Режим доступу: https://esu.com.ua/article-74709. – Останнє поновлення : 1 січ. 2023.